

Estimations directes des indices de multifractals universels dans le champ de vent et de température

François SCHMITT, Daniel LAVALLÉE, Shaun LOVEJOY, Daniel SCHERTZER
et Charles HOOGE

Résumé – Nous présentons de premières estimations empiriques directes de l'indice de Levy (α) caractérisant, dans le cadre des multifractals universels, l'intermittence des champs turbulents de température et de vitesse. En utilisant la technique d'analyse du double moment-trace, nous obtenons $\alpha_v \approx 1,3 \pm 0,1$, $\alpha_T \approx 1,2 \pm 0,1$. Ces valeurs montrent que la turbulence a un comportement situé entre celui des multifractals log-normaux ($\alpha=2$) et celui du monofractal β modèle ($\alpha=0$) et correspond à un processus multiplicatif inconditionnellement dur ($\alpha>1$). Ces résultats permettent également de nouvelles estimations pour la turbulence de vent du paramètre d'intermittence μ ($\approx 0,35 \pm 0,1$).

Estimates of universal multifractal indices for velocity and temperature fields

Abstract – We report the first direct empirical estimates of the Levy indices (α) characterizing the intermittency of turbulent velocity and temperature fields in the framework of universal multifractals. Using the double trace moment analysis technique, we find $\alpha_v \approx 1.3 \pm 0.1$, $\alpha_T \approx 1.2 \pm 0.1$, which shows that turbulence has behavior in between that of lognormal ($\alpha=2$) multifractal and β model ($\alpha=0$) monofractal. It is an unconditionally hard multifractal process (since $\alpha>1$). These results permit a new estimation for wind turbulence of the intermittency parameter μ ($\approx 0.35 \pm 0.1$).

Abridged English Version – 1. MULTIFRACTAL VELOCITY AND TEMPERATURE INDICES. – Ever since the development of the first concrete cascade models for turbulent intermittency ([1]-[6]), there has been considerable effort devoted to testing the models and evaluating their parameters. The two principal models [the "lognormal model" [1]-[2], and the β model ([3], [5], [6])] are simply the extremes of a continuous family of multifractal cascade models [7] characterized by a multifractal index α . This index is a measure of the degree of multifractality ([8]-[9]): $\alpha=0$ for the β model, the only monofractal case, and $\alpha=2$ for the maximum, the lognormal model. For conserved processes such as the turbulent energy flux to smaller scales (density ε) and the temperature variance flux (density χ) for the temperature field, the only other parameter is the codimension (C_1) of the mean of the process. These processes follow a multiple scaling law given by equation (1), where $\lambda=L/l$ (L is the largest scale and l is the smallest resolved scale), ε_λ represents ε at λ resolution and the exponent $K(q, 1)$ is the second characteristic function of the generator of our field. For non-conserved processes [such as wind and temperature shears, see equation (2)], we have an additional parameter (H) which is known ([10]-[12]) on dimensional grounds to have the value $1/3$. For universal processes [7], the characteristic function $K(q, 1)$ depends only on the three parameters α , C_1 and H , and is given by equation (3). We give here the first estimates of the Levy indices α for wind tunnel and atmospheric temperature data.

2. DATA SETS AND EXPERIMENTAL PROCEDURE. – The velocity measurements were made by Gagne [13] at the ONERA wind tunnel, Modane with 10 kHz resolution (¹) hot wire anemometers; we analysed an 8 min. section ($\approx 5 \times 10^6$ points). The temperature measurements were made by Hooge and Manoukian at 5 Hz for 12 min. at McGill. The time series (see Figs. 1 a, b for spectra) were power-law filtered in Fourier space to remove the $\lambda^{-1/3}$ scaling

Note présentée par Jean-Claude ANDRÉ.

0764-4450/92/03140749 \$ 2.00 © Académie des Sciences

in equation (2), before elevating them to the third power in order to yield the flux densities ε and φ .

3. RESULTS OF THE DOUBLE TRACE MOMENT TECHNIQUE. — The double trace moment technique has been developed to determine directly α and C_1 . The basic idea [14] is to generalize the application of simple trace moment [7] [equation (4)]—already a statistical generalization of the partition function [15]—to the quantity ε_λ^η , which is the η th power of ε_λ at the scale ratio λ' (the outer or largest scale of interest to the smallest scale of homogeneity). The multiple scaling exponent $K(q, \eta)$ of the q, η double trace moment is related [14] to $K(q, 1)$ by equation (5). The universal expression of $K(q, \eta)$ is given by equation (6). Keeping q fixed, the slope of $\text{Log}|K(q, \eta)|$ vs. $\text{Log}(\eta)$ gives the value of α , and we can then estimate C_1 , for example with the intercept of the fit line.

We applied the double trace moment technique to the estimates of ε and φ (as indicated in Section 2) for various orders q, η . The results are shown in Figures 2 *a, b* and 3 *a, b*. In both cases, as long as $q\eta$ is below a value $\approx 3 \pm 1$ for wind, $\approx 7 \pm 1$ for temperature, the plots of $\log K(q, \eta)$ vs. $\log \eta$ are very straight, as expected for universal multifractals, with slopes $\alpha_\varepsilon \approx 1.3 \pm 0.1$, $\alpha_\varphi \approx 1.2 \pm 0.1$, and intercepts yielding $C_{1\varepsilon} \approx 0.25 \pm 0.05$, $C_{1\varphi} \approx 0.15 \pm 0.05$. We can also evaluate the intermittency parameter ⁽²⁾ $\mu = K(2, 1)$. In the β model, $\mu = C_1$ while in the lognormal model $\mu = 2C_1$. In the 1970s measurements (for example [16]) based on estimates of the dissipation yielded values of $\mu_\varepsilon \approx 0.5$, whereas in the 1980s (for example [17]) structure functions yielded $\mu_\varepsilon \approx 0.2$. We obtain $\mu_\varepsilon \approx 1.55 C_1 = 0.35 \pm 0.1$, which is in the middle of the accepted range. Finally, the break-points η_D of Figure 3 *a* permit us to evaluate the order of divergence of moments $q_D = q\eta_D \approx 3 \pm 1$ for the wind field. This shows that wind turbulence is a “hard” multifractal process [18], a fact empirically suggested years ago ([19]-[21]).

⁽¹⁾ It corresponds to a resolution of 10 times the Kolmogorov scale; we have transformed it to a resolution of 40 times the Kolmogorov scale.

⁽²⁾ The definition of μ is $E_\varepsilon(k) \approx k^{-1+\mu}$. We can evaluate the intermittency correction of the Kolmogorov spectrum $E_\varepsilon(k) \approx \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ using the value of α : the slope is $-5/3 + K(2, 1/3) \approx -5/3 - \mu/4$.

1. LES INDICES MULTIFRACTALS DE TEMPÉRATURE ET DE VITESSE. — Depuis l'élaboration des premiers modèles concrets de cascade simulant l'intermittence de la turbulence ([1]-[6]), de nombreux efforts ont été entrepris pour éprouver ces modèles et déterminer leurs paramètres. Les deux modèles les plus connus [le modèle « log-normal » ([1]-[2]) et le β -modèle ([3], [5], [6])] ne sont que les extrêmes d'une famille continue de modèles de cascade multifractale [7], qui sont caractérisées par un indice α qui est une mesure de l'extension de la hiérarchie de singularités [8]: $\alpha = 0$ pour le β -modèle, le seul cas monofractal, et au maximum $\alpha = 2$ pour le modèle log-normal. Plus précisément, α est l'indice de Lévy du générateur du processus [9].

Pour les processus conservatifs, comme le flux d'énergie turbulente (de densité ε) et le flux de variance de température (de densité χ) vers les petites échelles, le seul autre paramètre à déterminer est la codimension (C_1) de la moyenne du processus.

Ces processus auront un comportement d'invariance d'échelle multiple pour les moments statistiques de la forme $\langle \cdot \rangle$ désignant la moyenne d'ensemble):

$$(1) \quad \langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K_\varepsilon(q, 1)}, \quad \langle \chi_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K_\chi(q, 1)}$$

avec $\lambda = L/l$ (où L est l'échelle extérieure et l la plus petite échelle résolue), ε_λ étant le champ ε observé à la résolution λ . L'exposant $K(q, 1)$ est la seconde fonction caractéristique (au sens de Laplace) du générateur du champ ([7]-[9]).

Pour les processus non conservatifs, comme les fluctuations de vent et de température, il faut introduire un troisième paramètre (H), qui intervient selon les relations ([10]-[12]).

$$(2) \quad \Delta v_\lambda \approx \varepsilon_\lambda^{1/3} \lambda^{-H_v}, \quad \Delta T_\lambda \approx \varphi_\lambda^{1/3} \lambda^{-H_T}; \quad \varphi = \varepsilon^{-1/2} \chi^{3/2}$$

où $\Delta v_\lambda [|v(x + \underline{u}L/\lambda) - v(x)| \text{ moyenné sur toutes les directions } \underline{u}]$ est l'amplitude des fluctuations de vent à la résolution λ , c'est-à-dire à l'échelle $l = L/\lambda$, de même ΔT_λ représente les fluctuations de températures à cette même échelle. Les paramètres H_v et H_T sont estimés ([10]-[12]), par analyse dimensionnelle, comme valant $1/3$.

Dans le cadre de l'universalité ([7], et travaux ultérieurs) la fonction caractéristique $K(q, 1)$ ne dépend que de trois paramètres α , C_1 et H selon la relation

$$(3) \quad K(q, 1) = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha - 1} (q^\alpha - q) - Hq, & \alpha \neq 1 \\ C_1 q \text{ Log}(q) - Hq, & \alpha = 1 \end{cases}$$

avec $0 \leq \alpha \leq 2$, et $q > 0$ pour $\alpha \neq 2$.

Nous procédons dans ce qui suit aux premières estimations expérimentales de l'indice multifractal de Lévy α à partir de données de vitesse turbulente provenant de la soufflerie de Modane, et à partir de données de turbulence atmosphérique de température mesurées à l'Université McGill.

2. JEUX DE DONNÉES ET PROCÉDURE EXPÉRIMENTALE. — Les données de vitesse ont été enregistrées par Gagne [13] à la soufflerie de Modane, avec des anémomètres à fil chaud de 10 kHz de résolution (¹); nous en avons analysé une durée de 8 mn ($\approx 5 \cdot 10^6$ points). Les données de température ont été enregistrées par Hooge et Manoukian à 5 Hz pendant

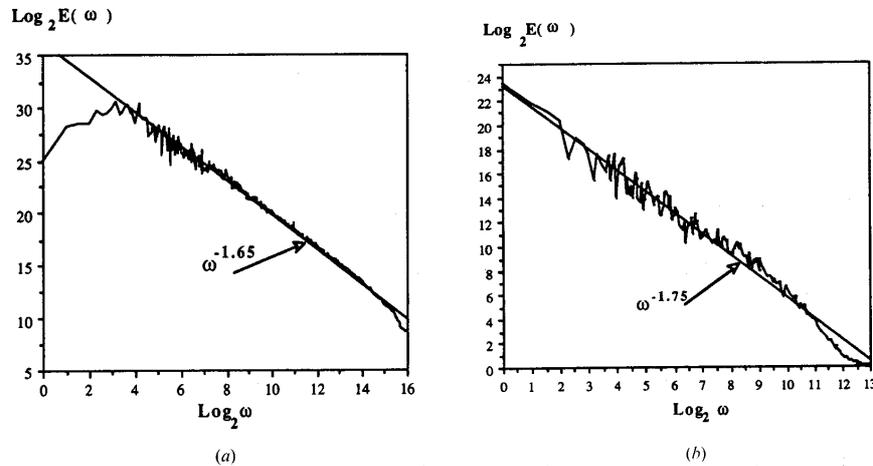


Fig. 1. — (a), (b) : Spectres $E(\omega)$ du vent (fig. 1 a) et de la température (fig. 1 b), de pentes spectrales $\beta_v \approx 1,65 \pm 0,05$ et $\beta_T \approx 1,75 \pm 0,05$.

Fig. 1. — (a), (b): Wind (Fig. 1 a) and temperature (Fig. 1 b) spectra $E(\omega)$, with $\beta_v \approx 1.65 \pm 0.05$ and $\beta_T \approx 1.75 \pm 0.05$.

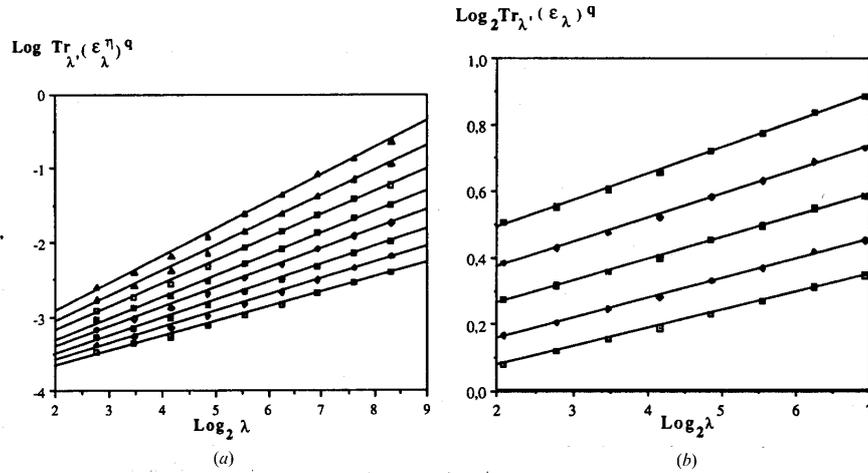


Fig. 2. - (a), (b) : Le double moment-trace en fonction de λ en représentation log-log pour différentes valeurs de q, η illustrant l'invariance d'échelle pour le vent (fig. 2 a) et la température (fig. 2 b).

Fig. 2. - (a), (b): Double trace moment as a function of λ in a log-log plot for various values of q, η showing the scale invariance for wind (Fig. 2 a) and temperature (Fig. 2 b).

12 mn. Les séries temporelles (dont le spectre d'énergie est de la forme $E(\omega) \approx \omega^{-\beta}$ avec $\beta_v \approx 1,65, \beta_T \approx 1,75$, ω étant la fréquence, voir les figures 1 a, b), ont été filtrées en puissance dans l'espace de Fourier pour supprimer le facteur $\lambda^{-1/3}$ de l'équation (2), avant d'être élevées au cube (en valeur absolue), pour ne conserver que les quantités ε et φ . Le filtrage nécessaire pour obtenir un flux rigoureusement conservatif n'est pas exactement $k^{1/3}$ (en particulier pour φ), mais la technique du double moment-trace n'est pas sensible à de légers écarts à la conservation [14].

3. RÉSULTATS DE LA TECHNIQUE DU DOUBLE MOMENT-TRACE. - La technique du double moment-trace d'un flux a été introduite ([14], et travaux ultérieurs) en généralisant le (simple) moment-trace [7], pour déterminer directement α et C_1 . Le (simple) moment-trace d'ordre q correspond à l'intégration « suivant la diagonale » du moment d'ordre q

du flux $\left[\left\langle \left(\int_A \varepsilon_\lambda d\underline{x} \right)^q \right\rangle \right]$:

$$(4) \quad \text{Tr}_A(\varepsilon_\lambda^q) = \left\langle \int_A \varepsilon_\lambda^q d\underline{x} \right\rangle$$

Le moment-trace est une généralisation (statistique) de la fonction de partition [15] puisqu'il correspond à une moyenne statistique de moyenne d'espace.

Le double moment-trace d'ordre q, η est alors obtenu comme moment-trace d'ordre q sur le flux de densité ε_λ^η à l'échelle la plus fine : λ' étant le rapport de la plus grande échelle à la plus petite échelle résolue, pour les rapports d'échelles $\lambda \leq \lambda'$ la densité qui intervient $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$ est la moyenne spatiale (à ces échelles) de ε_λ^η .

L'exposant d'invariance d'échelle $K(q, \eta)$ [$\sim \text{Log}_\lambda [\text{Tr}_A(\varepsilon_\lambda^{(q)})] + (q-1)d$, ici la dimension d de l'espace est 1] du double moment-trace est relié [14] à $K(q, 1)$ par

$$(5) \quad K(q, \eta) = K(q, \eta, 1) - qK(\eta, 1)$$

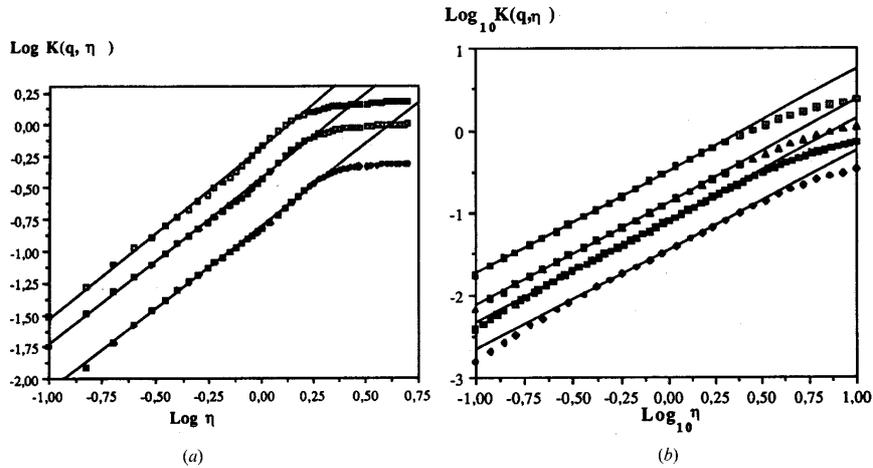


Fig. 3. - (a), (b) : $\text{Log} |K(q, \eta)|$ en fonction de $\text{Log} \eta$, pour le vent (fig. 3 a), et la température (fig. 3 b), avec $q=1,5, 2$ et $2,5$ pour le vent et $q=1,5, 2, 2,5$ et 4 pour la température, de bas en haut. Les pentes donnent : $\alpha_v \approx 1,3 \pm 0,1$ et $\alpha_T \approx 1,2 \pm 0,1$. La valeur de $\text{Log} |K(q, 1)|$ donne $C_{1v} \approx 0,25 \pm 0,05$ et $C_{1T} \approx 0,15 \pm 0,05$. Les points de rupture avec les droites d'ajustement donnent $q \eta_D = q_D \approx 3 \pm 1$ pour le vent et $q \eta_D \approx q_{\max T} \approx 7 \pm 1$ pour la température.

Fig. 3. - (a), (b): $\text{Log} |K(q, \eta)|$ vs. $\text{Log} \eta$, for wind (Fig. 3 a), and temperature (Fig. 3 b), with $q=1.5, 2$ and 2.5 for wind and $q=1.5, 2, 2.5$ and 4 for temperature, from bottom to top. The slopes give the values: $\alpha_v \approx 1.3 \pm 0.1$ and $\alpha_T \approx 1.2 \pm 0.1$. The value of $\text{Log} |K(q, 1)|$ gives $C_{1v} \approx 0.25 \pm 0.05$ and $C_{1T} \approx 0.15 \pm 0.05$. The break-points from the straight lines give $q \eta_D = q_D \approx 3 \pm 1$ for wind and $q \eta_D \approx q_{\max T} \approx 7 \pm 1$ for temperature.

La relation d'université [équation (3)] pour $K(q, 1)$ donne l'expression suivante pour $K(q, \eta)$ pour les processus conservatifs ($H=0$)

$$(6) \quad K(q, \eta) = \eta^\alpha K(q, 1) = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha - 1} \eta^\alpha (q^\alpha - q), & \alpha \neq 1 \\ C_1 \eta q \text{Log}(q), & \alpha = 1 \end{cases}$$

La pente de $\text{Log} |K(q, \eta)|$ en fonction de $\text{Log}(\eta)$ (q fixé) donne la valeur de l'indice α , qui nous permet ensuite de calculer C_1 , à l'aide par exemple de l'intercept de la droite d'interpolation. Cette opération peut être répétée pour différentes valeurs de q , ce qui permet une vérification systématique de l'équation (3).

Nous avons appliqué la technique du double moment-trace aux estimations de ϵ et φ (voir partie 2), pour divers ordres q et η . Les figures 2 a, b montrent l'invariance d'échelle obtenue pour le vent et la température, et les figures 3 a, b montrent les résultats de l'analyse. Dans les deux cas, tant que le produit $q \eta$ est inférieur à des valeurs $\approx 3 \pm 1$ pour le vent, $\approx 7 \pm 1$ pour la température, $\text{Log} |K(q, \eta)|$ est linéaire en $\text{Log}(\eta)$ conformément au comportement des multifractals universels [équation (6)]. Les pentes sont $\alpha_v \approx 1,3 \pm 0,1$ et $\alpha_T \approx 1,2 \pm 0,1$, et les intercepts donnent $C_{1v} \approx 0,25 \pm 0,05$, $C_{1\varphi} \approx 0,15 \pm 0,05$. Les barres d'erreurs sont estimées à partir des variations de α et C_1 pour différentes valeurs de q . Ces valeurs permettent d'estimer le paramètre d'intermittence $(^2) \mu$: dans le β modèle, $\mu = C_1$, dans le modèle lognormal, $\mu = 2 C_1$ et d'après $\mu = K(2, 1)$, nous obtenons $\mu_v \approx 1,55 C_1 = 0,35 \pm 0,1$. Cette valeur est intermédiaire entre celles des mesures des années 1970 (par exemple [16]) fondées sur des estimations de la dissipation, qui ont

données $\mu_e \approx 0,5$, et celles des années 1980 (par exemple [17]), par la méthode de fonctions de structures, qui ont données des valeurs plus proches de $\mu_e \approx 0,2$.

Enfin, les points de rupture de la figure 3a nous permettent d'évaluer l'ordre de divergence des moments [9] q_D à partir duquel $K(q, 1)$ devient linéaire en q pour la turbulence de vent [l'équation (3) n'est plus vérifiée]. En effet, selon l'équation (5), le premier point de rupture η_D de la courbe $K(q, \eta)$ en fonction de η interviendra pour $q \eta_D = q_D$ (lorsque $q > 1$), ce qui nous donne la valeur $q_D \approx 3 \pm 1$. Cette observation de la divergence des moments, et les valeurs de $\alpha > 1$ obtenues impliquent que la turbulence est multifractalement « dure » [18], comme le suggéraient des analyses antérieures de données atmosphériques ([19]-[21]).

(¹) Correspondant à une résolution de 10 fois l'échelle de Kolmogorov, que nous avons moyenné 4 à 4, donc ramenant la résolution à 40 fois l'échelle de Kolmogorov.

(²) $1 - \mu$ est la pente logarithmique du spectre de ε : $E_\varepsilon(k) \approx k^{-1+\mu}$; $\mu = K(2, 1)$ dans l'équation (1). La valeur de α obtenue permet d'évaluer la correction du spectre de Kolmogorov due à l'intermittence $E_\varepsilon(k) \approx \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$; la pente du spectre de vitesse est alors $-5/3 + K(2, 1/3) \approx -5/3 - \mu/4$.

Nous remercions A. Davis, G. Sarma, Ph. Ladoy pour des discussions stimulantes. Nous remercions la Direction des Recherches et Études techniques, Y. Gagne et R. Hopfinger qui ont bien voulu nous donner leur accord pour l'exploitation des données de vent, et U. Frisch pour nous en avoir facilité l'accès. Ces travaux ont été partiellement soutenus par Atmospheric Radiation Measurement (#DE-FG03-90ER61062).

Note soumise au présentateur le 29 novembre 1990, transmise à l'Académie le 23 juillet 1991, après une première révision le 9 juin 1991, acceptée définitivement le 10 février 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. N. KOLMOGOROV, *J. Fluid Mech.*, 13, 1962, p. 82-85.
- [2] A. OBUKHOV, *J. Geophys. Res.*, 67, 1962, p. 3011-3014.
- [3] E. A. NOVIKOV et R. STEWART, *Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R., Ser. Geofiz.*, 3, 1964, p. 408-412.
- [4] A. M. YAGLOM, *Sov. Phys. Dokl.*, 2, 1966, p. 26-30.
- [5] B. MANDELROT, *J. Fluid Mech.*, 62, 1974, p. 331-350.
- [6] U. FRISCH, P. L. SULEM et M. NELKIN, *J. Fluid Mech.*, 87, 1978, p. 719-724.
- [7] D. SCHERTZER et S. LOVEJOY, *J. Geophys. Res.*, 92, 1987, p. 9693. D. SCHERTZER et S. LOVEJOY, *Ann. Sc. Math. Que.*, 11, 1, 1987, p. 139-181.
- [8] D. SCHERTZER, S. LOVEJOY, D. LAVALLÉE et F. SCHMITT, in *Nonlinear Dynamics of Structures*, Sagdeev et coll., éd., World Scientific, Singapore, 1991, p. 213-235.
- [9] D. SCHERTZER et S. LOVEJOY, in *Fractal's Physical Origin and Properties*, PIETRONERO éd., Plenum Press, New York, 1989, p. 49-79.
- [10] A. N. KOLMOGOROV, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, 30, 1941, p. 301-305.
- [11] A. OBUKHOV, *Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Geogr. I Jeofiz.*, 13, 1949, p. 55-69.
- [12] S. CORRSIN, *J. Appl. Phys.*, 22, 1951, p. 469-473.
- [13] Y. GAGNE, E. J. HOPFINGER et U. FRISCH, in *New trends in Nonlinear Dynamics and Pattern Forming Phenomena: the geometry of non Equilibrium*, P. HUERRE et P. COULET éd., Plenum Press, New York, 1989.
- [14] D. LAVALLÉE, Multifractal techniques : Analysis and simulations of turbulent fields, *Ph. D. Thesis*, University McGill, Montréal, Canada, 1991, 133 p. D. LAVALLÉE, S. LOVEJOY, D. SCHERTZER et F. SCHMITT, in *Topological aspects of the dynamics of fluids and plasmas*, MOFFATT et coll. éd., Kluwer, Dordrecht-Boston, 1992 (sous presse).
- [15] T. C. HALSEY, M. H. JENSEN, L. P. KADANOFF, I. PROCACCIA et B. SHRAIMAN, *Phys. Rev. A*, 33, 1986, p. 1141-1151.
- [16] C. W. VAN ATTA et W. Y. CHEN, *J. Fluid Mech.*, 44, 1970, p. 145-159.
- [17] F. ANSELMET, Y. GAGNE, E. J. HOPFINGER et R. A. ANTONIA, *J. Fluid Mech.*, 140, 1984, p. 63-89.
- [18] D. SCHERTZER et S. LOVEJOY, *Physica A*, 1992 (sous presse).
- [19] D. SCHERTZER et S. LOVEJOY, *U.I.T.A.M. Symp on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, Preprint Vol., 1983, p. 141-144.
- [20] S. LOVEJOY et D. SCHERTZER, *Bull. A.M.S.*, 67, 1986, p. 21-32.
- [21] S. LOVEJOY et D. SCHERTZER, *J. Geophys. Res.*, 95, 1990, p. 2021-2034. S. LOVEJOY et D. SCHERTZER, *Non-linear variability in geophysics*, D. SCHERTZER et S. LOVEJOY éd., Kluwer, Dordrecht-Boston, 1991, p. 111-144.